附　　录

附录一　三次方程的根

设三次方程为

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

作变换 $x=y-\frac{b}{3}$，得

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2}$$

其中

$$p = c - \frac{b^2}{3}, \quad q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}. \tag{3}$$

再作一次变换 $y=z-\frac{p}{3z}$，得

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0. \tag{4}$$

这是 z^3 的二次方程，它的解是

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}, \tag{5}$$

其中

$$R = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}. \tag{6}$$

令

$$A = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{R}\right)^{1/3},$$

$$B = -\frac{p}{3A} = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{R}\right)^{1/3}, \tag{7}$$

摘自〈特殊函数概论〉(王竹溪，郭敬任著)

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad (\omega^3 = 1). \tag{8}$$

得 z 的三个根为 $z_1 = A, z_2 = \omega A, z_3 = \omega^2 A$,相应的 y 的三个根为

$$y_1 = A + B, \quad y_2 = \omega A + \omega^2 B, \quad y_3 = \omega^2 A + \omega B. \tag{9}$$

这是**卡丹**(Cardan)**公式**.

三次方程的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \\ &= (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \\ &= -108R = -4p^3 - 27q^2.\end{aligned} \tag{10}$$

将(3)式中的 p 和 q 代入,得

$$\Delta = 18bcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4c^3 - 27d^2 \tag{11}$$

当 $R<0$ 时,判别式 $\Delta>0$,三个根都是实数,这时候公式(9)不适用.可以用三角函数公式来求解.考虑下列三角函数公式:

$$4\cos^3 u - 3\cos u = \cos 3u. \tag{12}$$

令 $y = n\cos u$,代入上式,并乘以 $n^3/4$,得

$$y^3 - \frac{3n^2}{4}y - \frac{n^3}{4}\cos 3u = 0.$$

与方程(2)比较,得

$$p = -\frac{3n^2}{4}, \quad q = -\frac{n^3}{4}\cos 3u.$$

由此得

$$n = \left(-\frac{4p}{3}\right)^{1/2}, \quad \cos 3u = -\frac{q}{2}\left(-\frac{p}{3}\right)^{-3/2}. \tag{13}$$

由于 $R<0$,由(6)式看出,必有 $p<0$,因而(13)式所给出的 n 是实

摘自〈特殊函数概论〉(王竹溪, 郭敦仁著)